MA1 – „písemné" cvičení – určitý integrál 1

1. Určitý integrál Newtonův – „shrnutí" (definice, existence)

(i) fce f má primitivní funkci F v intervalu (c,d), $\langle a,b\rangle \subset (c,d)$, pak

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad \left(= \left[F(x)\right]_a^b\right)$$

(obecněji, má-li f primitivní funkci F v (a,b), a existují-li limity vlastní $\lim\limits_{x\to a+} F(x)$ $(= F(a^+))$ i $\lim\limits_{x\to b-} F(x)$ $(= F(b^-))$, pak se Newtonův integrál definuje obecněji

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = F(b^-) - F(a^+) \quad)$$

(ii) existence:
f je spojitá v $\langle a,b\rangle \Rightarrow (N)\int_a^b f(x)\,dx$ („stručněji" $(N)\int_a^b f$) existuje (píšeme $f \in N(a,b)$)

(iii) „vlastnosti" $(N)\int_a^b f$

$f,g \in N(a,b) \Rightarrow f+g \in N(a,b)$ a $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$;

$c \in R$, $f \in N(a,b) \Rightarrow c.f \in N(a,b)$ a $\int_a^b cf = c\int_a^b f$

$f \in N(a,b)$, $\alpha \in (a,b)$, pak $f \in N(a,\alpha)$ i $f \in N(\alpha,b)$ a

$$\int_a^b f = \int_a^\alpha f + \int_\alpha^b f$$

(iv) pro výpočet $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ „potřebujeme" primitivní funkci $F(x)$ v $\langle a,b\rangle$ (nebo obecněji v (a,b) a konečné limity $F(a^+)$, $F(b^-)$), a metody výpočtu primitivních funkcí lze „kopírovat" i pro výpočet určitého integrálu (viz přednáška a příklady):

<u>Integrace per partes</u>: f', g' spojité v $\langle a,b\rangle$, pak

$$(N)\int_a^b f'g = [f\cdot g]_a^b - (N)\int_a^b fg' ;$$

1. <u>Substituce</u> – „jednoduché" užití při předpokladech :

$g'(x)$ je spojitá v $\langle a,b\rangle$ a $g'(x)\neq 0$ v $\langle a,b\rangle$,
f je spojitá na intervalu $J = g(\langle a,b\rangle)$, pak

$$(N)\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt \;; \qquad (1VS)$$

<u>a 2VS</u> $f(x)$ je spojitá v $\langle a,b\rangle$, $g'(t)$ je spojitá v (α,β),
$g'(t)\neq 0$ v (α,β) a $g(\alpha,\beta)\supset\langle a,b\rangle$; pak

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$$

2. <u>Integrál Riemannův – „shrnutí"</u>

(i) f je definovaná na $\langle a,b\rangle$, $(a<b,\ a,b\in R)$,
$f\in R(a,b)$, když existuje vlastní limita Riemannových integrálních součtů pro normu dělení jdoucí k nule,

tj. $$(R)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\nu(D)\to 0} \sigma(f,D),$$

kde $$\sigma(f,D) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

$D: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, $\xi_i\in\langle x_{i-1},x_i\rangle$, $\nu(D) = \max_{i=1..n}|x_i - x_{i-1}|$

(ii) • $f \in R(a,b) \Rightarrow$ f je omezená na intervalu $\langle a,b\rangle$
(tedy, funkce neomezené na (a,b) nemají
$(R)\int_a^b f(x)dx$;

• f je spojitá v $\langle a,b\rangle \setminus K$, K-konečná, f je omezená v $\langle a,b\rangle \Rightarrow f \in R(a,b)$

• f je spojitá v $\langle a,b\rangle \Rightarrow f \in R(a,b)$ a

$$(R)\int_a^b f(x)dx = (N)\int_a^b f(x)dx \quad ;$$

(platí i obecněji:
$$f \in N(a,b) \cap R(a,b) \Rightarrow (R)\int_a^b f = (N)\int_a^b f \, ,$$
a spec. tedy $f \in C(a,b) \Rightarrow f \in N(a,b) \cap R(a,b)$))

(iii) <u>vlastnosti</u> $(R)\int_a^b f(x)dx$:

• $f, g \in R(a,b) \Rightarrow f+g \in R(a,b)$ a $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$
$c \in R$, $f \in R(a,b) \Rightarrow cf \in R(a,b)$ a $\int_a^b cf = c\int_a^b f$;

• $f \in R(a,b)$, $\alpha \in (a,b) \Rightarrow f \in R(a,\alpha)$ i $f \in R(\alpha,b)$ a
$$(R)\int_a^b f = (R)\int_a^\alpha f + (R)\int_\alpha^b f$$
(„hodí" se pro počítání integrálů) ;

• $f, g \in R(a,b)$, $f(x) \leq g(x)$ v $\langle a,b\rangle \Rightarrow (R)\int_a^b f \leq (R)\int_a^b f$;

• f je spojitá v $\langle a,b\rangle$, pak existuje $c \in \langle a,b\rangle$ tak, že
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c) \, , \text{ tj. } \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) .$$

(iv) výpočet: $f \in C(a,b)$, pak $(R)\int_a^b f(x)dx = (N)\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$.
(F je primit. fce k f v $\langle a,b\rangle$

Příklady

1. K definici (R) $\int_a^b f(x)\,dx$:

- $\int_0^1 e^x\,dx$ existuje jako Riemannův i Newtonův ($f(x)=e^x$ je spojitá v $\langle 0,1\rangle$)
- (N) $\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e-1$
- zkusme např. definici (R) $\int_0^1 e^x\,dx$ –

vezmeme dělení D_n intervalu $\langle 0,1\rangle$:

$$D_n:\ 0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\dots<\frac{n-1}{n}<1$$

horní součty (R) jsou: $\underline{S(f,D_n)} = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n} =$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k = \underline{\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}}\,\frac{1-e^{\frac{n+1}{n}}}{1-e^{\frac{1}{n}}}}$$

(částečný součet geometrické řady)

A protože (R)$\int_0^1 e^x\,dx$ existuje, je

$$\underline{(R)\int_0^1 e^x\,dx} = \overline{\int_0^1} e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} S(f,D_n) = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{\frac{1}{n}}}}_{\to(-1)}\cdot\underbrace{\left(1-e^{\frac{n+1}{n}}\right)}_{\to 1-e}\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{n}}}_{\to 1}$$

(takzvaná limita $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$)

$$= \underline{e-1} \quad \text{(dále)}$$

2. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ – existuje v (R) i (N) smyslu

funkci $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ v $(0,1\rangle$ můžeme dodefinovat spojitě $f(0)=1$, ale primitivní funkci nemůžeme vyjádřit pomocí elementárních funkcí – pak se integrál počítá „přibližně" – „numericky"

3. <u>Příklady na „mechanické" počítání určitých integrálů:</u>

a) • $\underline{\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx} = \left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ (integrál existuje jako R i N – f je spojitá v $\langle 0,1\rangle$)

• $\underline{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx} = \left[\arcsin x\right]_0^1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ – ale tento integrál je jen (N), neboť funkce $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ není omezená v $\langle 0,1)$!

• $\underline{f(x)=\begin{cases} 2x, & x\in\langle -1,0\rangle \\ 2x+1, & x\in(0,1\rangle \end{cases}}$; f je spojitá v $\langle -1,1\rangle \setminus \{0\}$, ale omezená, tedy existuje $R\int_{-1}^1 f$, ale nemá Darbouxovu vlastnost v $\langle -1,1\rangle$,

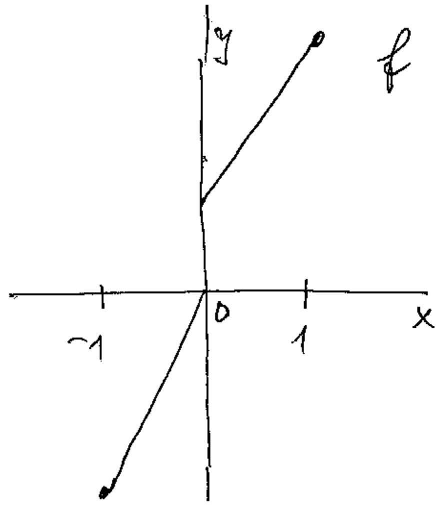
f tedy nemá v $\langle -1,1\rangle$ primitivní funkci (ani v $(-1,1)$)
ale pro výpočet $R\int_{-1}^1 f$ můžeme využít „aditivity" $R\int_a^b f$:

$$(R)\int_{-1}^1 f(x)\,dx = (R)\int_{-1}^0 2x\,dx + (R)\int_0^1 (2x+1)\,dx$$, a integrály v $(-1,0)$ i v $(0,1)$ už jsou i (N):

tedy:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left[x^2\right]_{-1}^{0} + \left[x^2+x\right]_{0}^{1} =$$

$$= (0-1) + (2-0) = 1$$



• $\displaystyle\int_0^5 |x^2-3x+2|\,dx$ – existuje jako (N) i (R) integrál

($f(x)=|x^2-3x+2|$ je spojitá v $\langle 0,5\rangle$, ale pro výpočet je nutné opět interval „rozdělit" podle znaménka " x^2-3x+2 :

$$|x^2-3x+2| = |(x-2)(x-1)| = \begin{cases} x^2-3x+2 & \text{v } \langle 0,1\rangle \cup \langle 2,5\rangle \\ -(x^2-3x+2) & \text{v } (1,2) \end{cases}$$)

tedy

$$\int_0^5 |x^2-3x+2|\,dx = \int_0^1 (x^2-3x+2)\,dx - \int_1^2 (x^2-3x+2)\,dx + \int_2^5 (x^2-3x+2)\,dx = \ldots\ldots$$

b) užití substituce („jednoduché" příklady na začátek)

• $$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_1^4 e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x})'\,dx = 2\int_1^2 e^t\,dt = 2\left[e^t\right]_1^2 = 2(e^2-e)$$

existuje (R) i (N)
(f je spojitá v $\langle 1,4\rangle$)

$\varphi(x)=t$: $\varphi'(x)>0$ v $\langle 1,4\rangle$
spojitá
$\varphi(1)=1$, $\varphi(4)=2$

- ale $\underline{(N)\int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx} \underset{\text{substituce}}{=} 2\int_0^2 e^t\,dt = 2\left[e^t\right]_0^2 = \underline{2(e^2-1)}$

existuje ale jen jako (N), neboť $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ je neomezená v $(0,4\rangle$

$\left(\lim_{x\to 0+} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = +\infty\ !\right)$

- $\underline{\int_2^3 \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)dx} \underset{\text{substituce}}{=} -\int_2^3 \ln\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' dx =$

$\frac{1}{x} = t$

$x = 2 \to t = \frac{1}{2}$

$x = 3 \to t = \frac{1}{3}$

(integrál N i R – – spojitá fce v $\langle 2,3\rangle$)

$= -\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{3}} \ln t\,dt = \quad \left(\frac{1}{2} > \frac{1}{3}\right)$ (dle rozšiřující definice)

$= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \ln t\,dt \underset{pp}{=} \left| \begin{array}{l} u' = 1,\ u = t \\ v = \ln t,\ v' = \frac{1}{t} \end{array} \right| = \left[t\ln t\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} t\cdot\frac{1}{t}\,dt =$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{3}\right) - \left[t\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \underline{\frac{1}{3}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}}$

- $\underline{\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx} = \left[e^{\sin x}\right]_{-\pi}^{\pi} = e^0 - e^0 = 0$

(N i R – – spojitá fce v $\langle -\pi,\pi\rangle$)

$F(x) = \int e^{\sin x}\cdot\cos x\,dx = e^{\sin x}$ (snadno) a vychází i při substituci:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin x}\cos x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin x}(\sin x)' \, dx = \int_{0}^{0} e^{t}\, dt = 0 \text{ (dle def.)}$$

lze tedy užívat substituci

$\sin x = t$

pak $x = -\pi \rightarrow t = 0$

$x = \pi \rightarrow t = 0$

a jsou splněny i předpoklady věty o substituci

Ale v $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx$ musíme dát pozor! Při doporučené substituci $\operatorname{tg} x = t$ – chybí bod $x = \frac{\pi}{2}$,

(existuje jako R i N – spojitá fce)

ale kdybychom „přepočítávali" meze, pak i zde $x = 0 \rightarrow t = 0$ $(= \operatorname{tg} 0)$!

$x = \pi \rightarrow t = \operatorname{tg} 0 = 0$

ale tohle nemůže vyjít dobře!

(promyslete, že je-li $f(x) > 0$ v $\langle a,b\rangle$ (a spojitá zde konč.), pak $(R)\int_a^b f > 0$ (pro $f \in R(a,b)$))

A jak je třeba tento integrál „spočítat" – buď primitivní fci na $\langle 0,\pi\rangle$, která existuje, „slepit" (viz cvičení – jako příklad), nebo užít aditivitu:

$$\int_0^{\pi} f = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f$$

Užitím substituce $\operatorname{tg} x = t$ bychom spočítali primitivní funkci k

$$f(x) = \frac{1}{1+\sin^2 x} \quad \text{v} \quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right): \quad F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + c_0$$

a systém primitivních funkcí lze „opakovat" díky periodicitě (s periodou π) fce f i v dalších intervalech, zde v $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$,

tedy:
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \Big(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} \Big(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\underbrace{\sqrt{2}\operatorname{tg} x}_{\to +\infty})\Big) - 0\Big) + \Big(0 - \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\underbrace{\sqrt{2}\operatorname{tg} x}_{\to -\infty})\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \pi$$

Pozn: vezmeme-li primitivní funkci $F(x)$ v $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ (dostali jsme ji „slepením" v bodě $x = \frac{\pi}{2}$):

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x), & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2}, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\pi, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases},$$

pak
$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx = \left[F(x)\right]_0^{\pi} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\pi + 0\right) - 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \pi$$

(opět)

K předchozím příkladům přidám "jistě" několik aplikací, a další a příklady ze "základní" příkladů ke cvičení, tedy se cvičí "vlastnosti" $R \int_a^b f$, doplníme v další části cvičení (písemného) a v řešení úloh a domácího úkolu.

Aplikace určitého integrálu:

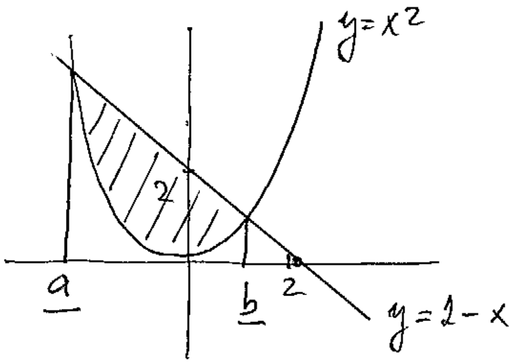
1. Obsah rovinné oblasti $\omega = \{ [x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x \in \langle a,b \rangle,\ f(x) \le y \le g(x) \}$

$f, g \in R(a,b)$, pak

$$S(\omega) = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx$$

(i) ? obsah omezené! rovinné oblasti, která je ohraničená grafy funkcí

$y = x^2$ a $y = 2 - x$



$$S = \int_a^b [(2-x) - x^2]\,dx \ -$$

– a potřebujeme jistě „meze" $\underline{a, b}$, tj. souřadnice průsečíků paraboly a přímky:

$$x^2 = 2 - x \iff x^2 + x - 2 = 0$$

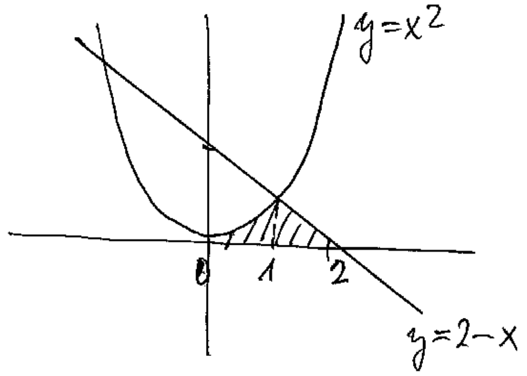
$$(x+2)(x-1) = 0,$$

tj. $\underline{a = -2,\ b = 1}$

a $$S = \int_{-2}^{1} ((2-x) - x^2)\,dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - \frac{4}{2} - \frac{(-8)}{3}\right) = \dots$$

(ii) ? obsah omezené!! rovinné oblasti, která je ohraničená grafy funkcí $y=x^2$, $y=2-x$ a osou x :



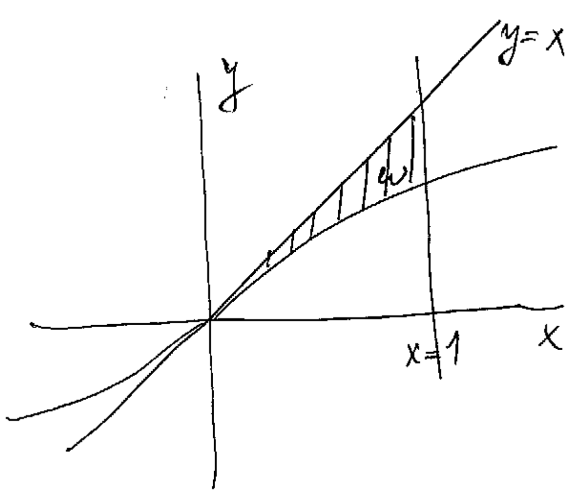
(oblast, kterou značíme, musí být „omezená" – omlouvám se, v zadání zde jsem to zapomněla napsat)

zde máme oblast „shora" omezenou dvěma různými grafy, tedy použijeme aditivitu:

$$S=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2-x)dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_1^2=$$

$$=\frac{1}{3}+\left[(4-2)-\left(2-\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

(iii) ? obsah omezené rovinné oblasti ω, která je ohraničená grafem funkce $y=\operatorname{arctg} x$, tečnou k tomuto grafu v $[0,0]$ a přímkou $x=1$.



rovnice tečny ke grafu fce $\operatorname{arctg} x$ v $[0,0]$ je $y=x$ $\left(y=f(0)+f'(0)\cdot x,\ f(0)=0,\ f'(0)=1\right)$

tedy,

$$S(\omega)=\int_0^1(x-\operatorname{arctg}x)dx=\int_0^1 x\,dx-\int_0^1\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{1}{2}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)$$

a $$\int_0^1\operatorname{arctg}x\,dx\underset{PP}{=}\left[x\operatorname{arctg}x\right]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}dx=\left[x\operatorname{arctg}x\right]_0^1-\frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$$

2. Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti
$\omega = \{[x,y];\ x \in \langle a,b\rangle;\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ kolem osy x
(předpokládáme, že f je spojitá v $\langle a,b\rangle$). Pak je objem

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

(pokud budete potřebovat hodně vysvětlit „cestu" k tomuto vzorci i k návrhu nenulovému (pro výpočet obsahu rovinné oblasti), mohu to napsat podrobněji, nebo můžeme mít i online konzultaci.)

(i)? objem rotačního tělesa, které vznikne rotací oblasti
$\omega = \{[x,y];\ x \in \langle 1,e\rangle,\ 0 \leq y \leq \ln x\}$ kolem osy x:

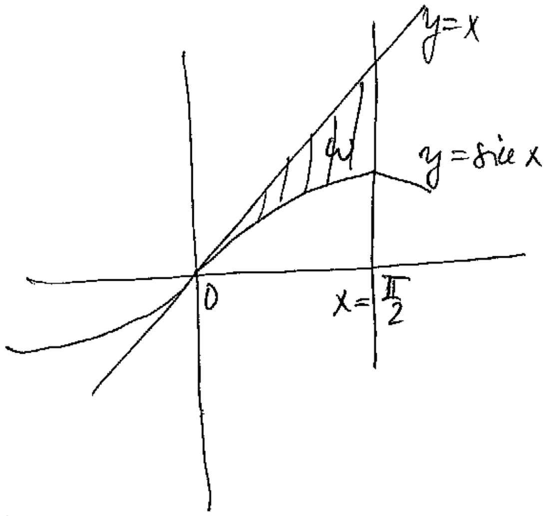
$$V = \pi \int_1^e \ln^2 x\,dx \underset{pp}{=} \left| \begin{array}{l} u' = 1,\ u = x \\ v = \ln^2 x,\ v' = 2\ln x \cdot \frac{1}{x} \end{array} \right| =$$

$$= \pi\left(\left[x \ln^2 x \right]_1^e - 2\int_1^e \ln x\,dx \right) \underset{pp}{=} \left| \begin{array}{l} u' = 1,\ u = x \\ v = \ln x,\ v' = \frac{1}{x} \end{array} \right| =$$

$$= \pi\left(\left[x \ln^2 x \right]_1^e - 2\left(\left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e dx \right) \right) =$$

$$= \pi \left\{ e - 2(e - (e-1)) \right\} = \underline{\pi(e-2)}$$

(ii) ? objem rotačního tělesa, které vznikne rotací omezené oblasti ω kolem osy x, kde ω je ohraničená grafem fce $y = \sin x$, tečnou k tomuto grafu v $[0,0]$ a přímkou $x = \frac{\pi}{2}$:



$V = V_1 - V_2$, kde

$$V_1 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx \quad , \quad V_2 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$$

$$V_1 = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \left(\frac{\pi^3}{24} \right)$$

$$V_2 = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$

tj. $V = V_1 - V_2 = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right)$.

3. Délka grafu funkce $y = f(x)$, pro $x \in \langle a,b \rangle$, předpokládáme, že je $f'(x)$ spojitá v $\langle a,b \rangle$, pak

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

(často nám vyjdou „nepříjemné" integrály, tak uvedu jen „málo" příkladů v zadání)

Určete délku grafu funkce $y = \ln(\cos x)$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$:

$f(x) = \ln(\cos x)$, $f'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\operatorname{tg} x$,

tj. $l = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}\, dx \overset{*}{=}$

asi „klasickou" substituci

$\operatorname{tg} x = t$ – zde jsou (tj. v $\langle 0, \frac{\pi}{6} \rangle$)

předpoklady věty splněny

(pro substituci v opačném „směru")

$\operatorname{tg} x = t$

$x = \operatorname{arctg} t \equiv g(t)$

$dx = \frac{1}{1+t^2} dt \quad \left(g'(t) = \frac{1}{1+t^2} \right)$

„známé" meze :

$x = 0 \to t = 0$

$x = \frac{\pi}{6} \to t = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\overset{*}{=} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = \text{(„tabulka")}$$

$$= \left[\ln\left(t + \sqrt{1+t^2} \right) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{1+\frac{1}{3}} \right) =$$

$$= \ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) = \ln(\sqrt{3})$$

„Zatím" vše, ještě „přidám" další příklady.